

Hauptseminar Stochastik

Markovketten

Thema

1 Einleitung

1.1 Einige \LaTeX -Hinweise

- Für Variablen im Fließtext Inline-Formeln verwenden. Statt “Sei x eine reelle Zahl” besser “Sei x eine reelle Zahl” oder noch kürzer “Sei $x \in \mathbb{R}$ ”.
- Umlaute und andere Sonderzeichen durch die korrekte Angabe des Eingabeformates durch `\usepackage[Eingabeformat]{inputenc}`, wobei “Eingabeformat” abhängig vom Betriebssystem und Editor ist: Linux `utf8`; Windows `latin9`; Mac `macce`
- Mathematische Operatoren und Funktionen sind meist als LaTeX-Kommando implementiert und werden aufrecht dargestellt: Statt *lim* besser `lim`, statt *sin* besser `sin`, statt *det* besser `det`.

Es können mathematische Sätze und Definition verwendet werden:

Definition 1.1 (Gewöhnliche Differentialgleichung). Eine Kurve $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung mit Richtungsfeld $F : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ falls gilt

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t)) \quad \text{mit} \quad x(0) = x_0. \quad (1.1)$$

Falls $F(t, x) = F(x)$ unabhängig von $t \in [0, \infty)$, dann heißt die Gleichung *autonom*, ansonsten *nicht-autonom*. Falls $F(t, x)$ linear in x , d.h. $F(t, c_1x_1 + c_2x_2) = c_1F(t, x_1) + c_2F(t, x_2)$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dann heißt die Differentialgleichung *linear*, ansonsten *nicht-linear*.

Satz 1.2. Für $a \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ist die eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$x'(t) = ax(t) \quad \text{mit} \quad x(0) = x_0 \quad (1.2)$$

gegeben durch

$$x(t) = x_0 e^{at}. \quad (1.3)$$

Beweis. Man rechnet nach, dass $x(t)$ gegeben in (1.3) eine Lösung von (1.2) ist. Bleibt zu zeigen, dass diese eindeutig ist. Dazu sei $y(t)$ eine weitere Lösung von (1.2). Wir definieren $f(t) = y(t)e^{-at}$. Dann folgt

$$f'(t) = y'(t)e^{-at} - ay(t)e^{-at} = 0$$

Also ist $f(t) = C$ für ein $C \in \mathbb{R}$. Da jedoch $f(0) = y(0) = x_0$, folgt $C = x_0$ und damit $y(t) = x(t)$, womit die Lösung eindeutig ist. \square

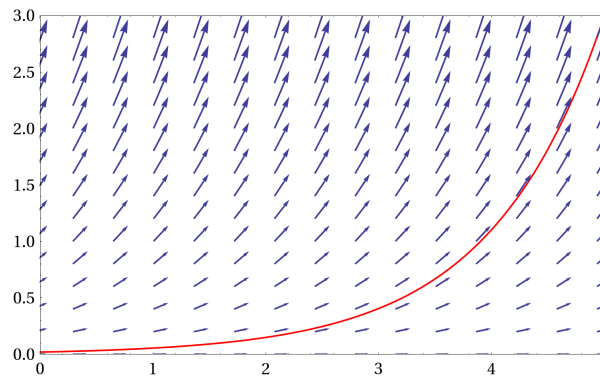


Abbildung 1: Das Richtungsfeld $F(t, x) = x$ (blau), die horizontale Achse ist t und die vertikale Achse entspricht x . Die Länge und Stärke der Pfeile entspricht $F(t, x)$. Man erkennt das F autonom ist, da in jeder vertikale Schnitt gleich ist zu einem horizontal verschobenen Schnitt. Weiter ist eine Lösungskurve (rot) eingezeichnet. Hierbei erkennt man, wie die Vektoren in jedem Punkt tangential zur Kurve sind, so wie es durch (1.1) gefordert wird.

Lemma 1.3 (Youngsche Ungleichung). Für $\varepsilon > 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2. \quad (1.4)$$

Beweis. Folgt aus

$$0 \leq \left(\sqrt{\varepsilon}a - \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^2 = \varepsilon a^2 - 2ab + \frac{b^2}{\varepsilon}$$

□

Ähnliches funktioniert mit Beispielen und Bemerkungen

Beispiel 1.4. Beispiel

Bemerkung 1.5. Bemerkung